IV. Ellenpélda. *(3×3 p.)*

1. Adjon meg egy olyan $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ függvényt, amely differenciálható az $]0,1[$ halmazon, $f(0) = f(1)$, de nem létezik olyan $c \in\ ]0,1[$ szám, melyre $f'(c) = 0$ teljesülne.

$f(x) = x$ $[0,1)$ -en, $f(1) = 0$

2. Adjon meg egy olyan sort, mely konvergens, de nem abszolút konvergens.

$$\sum \frac{(-1)^n}{n}$$

3. Adjon meg egy olyan $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ függvényt, mely folytonos, de nem egyenletesen folytonos.

$f(x) = \frac{1}{x}$

(4×4 p.) **I. Határozatlan integrál.** Adja meg az alábbi integrálokat.

1. $\displaystyle\int \frac{1}{x+2} - \frac{1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}\,x$ $= \ln|x+2| + \frac{1}{x+1} + c, \quad x \neq -1, -2$

2. $\displaystyle\int \sin(2x)\,\mathrm{sh}(3x)\,\mathrm{d}\,x$ $= I = \sin 2x \frac{\mathrm{ch}\,3x}{3} - \int \frac{2}{3}\cos 2x\,\mathrm{ch}\,3x\,dx =$

$= \sin 2x \frac{\mathrm{ch}\,3x}{3} - \frac{2}{9}\cos 2x\,\mathrm{sh}\,3x + \frac{4}{9}\underbrace{\int \sin 2x\,\mathrm{sh}\,3x\,dx}_{I}$

$\frac{13}{9} I = \sin 2x \frac{\mathrm{ch}\,3x}{3} - \frac{2}{9}\cos 2x\,\mathrm{sh}\,3x + c_1, \quad I = \frac{1}{13}(3\sin 2x\,\mathrm{ch}\,3x - 2\cos 2x\,\mathrm{sh}\,3x) + C$

3. $\displaystyle\int \cos\sqrt{x}\,\mathrm{d}\,x$ (Útmutatás: célszerű a $t = \sqrt{x}$ helyettesítés.) $= \int 2t\cos t\,dt =$

$x = t^2$, $dx = 2t\,dt$

$= 2t\sin t - \int 2\sin t\,dt = 2t\sin t + 2\cos t + c =$

$= 2\sqrt{x}\sin\sqrt{x} + 2\cos\sqrt{x} + c, \quad x \geq 0$

4. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+2x+3}\,\mathrm{d}\,x$ $= \int \frac{dx}{(x+1)^2+2} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2} =$

$= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot \mathrm{arctg}\,\frac{x+1}{\sqrt{2}} + c$